PART2 2次曲線の媒介変数表示

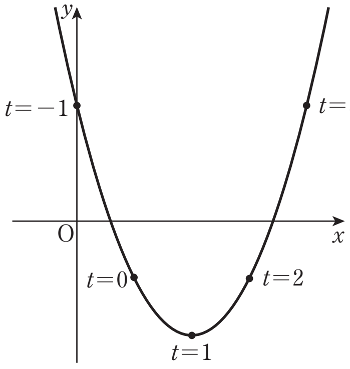
要点整理と公式

要点① 媒介変数表示

座標平面上において，点Pの x 座標，y 座標が，変数 t によって

$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=t^2-2t-1 \end{cases} \quad \cdots\cdots①$$

で表されるとき，$t=-1$，0，1，2，3 に対応する点Pの座標はそれぞれ (0，2)，(1，-1)，(2，-2)，(3，-1)，(4，2) となる。さらに，いろいろな t の値に対する点Pを座標平面上にとることにより，点Pの軌跡を描くことができる。



一般に，座標平面上の曲線が変数 t によって

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

の形に表されるとき，これをその曲線の「　　　　　　　　」(「パラメータ表示」)といい，t を「　　　　　」(パラメータ)という。

①から t を消去すると

$$y=(x-1)^2-2(x-1)-1 \text{ つまり } y=x^2-4x+2$$

となる。また，t がすべての実数値をとるとき，x もすべての実数値をとる。

よって，①は放物線 $y=x^2-4x+2$ の媒介変数表示である。

媒介変数による曲線の表示方法は1通りではなく，$x=t$，$y=t^2-4t+2$ もまた，放物線 $y=x^2-4x+2$ の媒介変数表示である。

(ex) 媒介変数表示 $x=2t^2$，$y=4t$ で表される曲線

$y=4t$ より $t=$

これを $x=2t^2$ に代入して $x=2\cdot\left(\quad\right)^2$　　よって「　　　　」$y^2=8x$

要点 ② 三角関数を用いた媒介変数表示

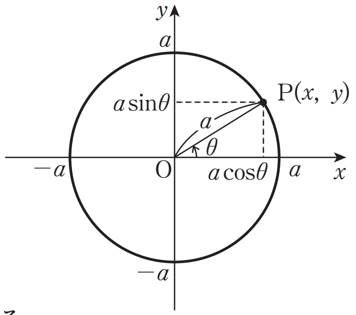
媒介変数については，一般角 θ を用いるものもある。

原点 O を中心とする半径 a の円 $x^2+y^2=a^2$ ……②

上の点を P$(x,\ y)$とし，動径 OP が x 軸の正の向きと

なす角を θ とすると

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$$



と表すことができる。これは，円②の媒介変数表示である。

なお，θ は弧度法で表すこととする。

(ex) 円 $x^2+y^2=16$ を媒介変数 θ を用いて表すと $\begin{cases} x= \\ y= \end{cases}$

$x^2+y^2=a^2$ を y について解くと　$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を y について解くと　$y^2=b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$

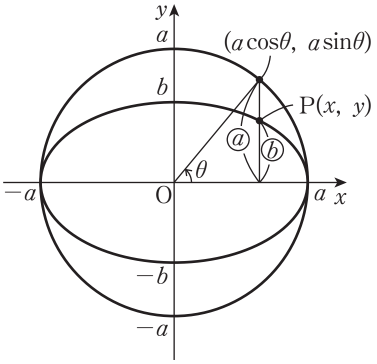
$y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

よって，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，円 $x^2+y^2=a^2$ を

y 軸方向に　　倍した曲線であることがわかる。

したがって，楕円の媒介変数表示は

$x=a\cos\theta$，$y=$　　$\cdot a\sin\theta$　　つまり $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$



である。この θ は，図の OP と x 軸の正の方向がなす角ではないことに注意。

要点 ③ 媒介変数表示される曲線の平行移動

媒介変数表示 $x=2\cos\theta+1$，$y=3\sin\theta-1$ はどのような曲線を表すか考える。

$\cos\theta=\dfrac{x-1}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{y+1}{3}$　これを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

これは，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$，つまり媒介変数表示 $x=$　　　　，$y=$　　　　で表される

楕円を x 軸方向に　，y 軸方向に　　平行移動した楕円を表す。

2 (1) 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

(i) $x=t-1$，$y=t^2-2$　　(ii) $x=t+2$，$y=\sqrt{t}$

(iii) $x=4\cos\theta$，$y=2\sin\theta+3$　　(iv) $x=\dfrac{2}{\cos\theta}$，$y=3\tan\theta$

(2) 角 θ を媒介変数として，次の曲線の媒介変数表示を求めよ。

(i) $x^2+y^2=25$　　(ii) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$　　(iii) $\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

Point Pickup

媒介変数表示

平面上の曲線 C が，変数 t によって

$$x=f(t),\quad y=g(t)$$

の形で表されるとき，これを曲線 C の媒介変数表示(パラメータ表示)といい，
変数 t を媒介変数(パラメータ)という。
媒介変数を消去して x，y の式を求められる場合がある。

特に，媒介変数が一般角 θ で表される場合は，三角関数の相互関係を用いるとよい。

2次曲線の媒介変数表示

放物線 $y^2=4px$ … $x=pt^2$，$y=2pt$

円 $x^2+y^2=a^2$ … $x=$　　　　，$y=$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ … $x=$　　　　，$y=$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ … $x=\dfrac{a}{\cos\theta}$，$y=b\tan\theta$

第 3 講 PART2 確認問題

次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

答えは下の①～④のうちから選べ。

1 $x=t+2$，$y=t^2-4$ ［ア］

① 直線 $y=x+2$　② 放物線 $y=x^2-4x$

③ 放物線 $y=x^2-4$　④ 放物線 $y=x^2-4x+4$

2 $x=\sqrt{t}$，$y=t-3$ ［イ］

① 直線 $y=x-3$　② 放物線 $y=x^2+5$

③ 放物線 $y=x^2-3$ の $x\geqq 0$ の部分

④ 放物線 $y=x^2-3$ の $y\geqq 0$ の部分

3 $x=3\cos\theta$，$y=2\sin\theta-1$ ［ウ］

① 円 $x^2+(y+1)^2=13$

② 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

③ 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1$

④ 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

4 $x=\dfrac{3}{\cos\theta}$，$y=2\tan\theta$ ［エ］

① 双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$

② 双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=-1$

③ 双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$

④ 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

角 θ を媒介変数として，次の曲線の媒介変数表示を求めよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

5 $x^2+y^2=9$ オ

① $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$

② $x=3\cos\theta$，$y=3\sin\theta$

③ $x=9\cos\theta$，$y=9\sin\theta$

④ $x=\dfrac{3}{\cos\theta}$，$y=3\tan\theta$

6 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ カ

① $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$

② $x=\dfrac{1}{2}\cos\theta$，$y=\dfrac{1}{3}\sin\theta$

③ $x=2\cos\theta$，$y=3\sin\theta$

④ $x=4\cos\theta$，$y=9\sin\theta$

7 $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{16}=1$ キ

① $x=\dfrac{\cos\theta-1}{3}$，$y=\dfrac{\sin\theta+2}{4}$

② $x=\cos\theta+1$，$y=\sin\theta-2$

③ $x=3\cos\theta-1$，$y=4\sin\theta+2$

④ $x=3\cos\theta+1$，$y=4\sin\theta-2$

[MEMO]

PART2 2 次曲線の媒介変数表示

2 (1) 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

(i) $x=t-1,\ y=t^2-2$　(ii) $x=t+2,\ y=\sqrt{t}$

(iii) $x=4\cos\theta,\ y=2\sin\theta+3$　(iv) $x=\dfrac{2}{\cos\theta},\ y=3\tan\theta$

(2) 角 θ を媒介変数として，次の曲線の媒介変数表示を求めよ。

(i) $x^2+y^2=25$　(ii) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$　(iii) $\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

[解答]

(1)(i) $x=t-1$ より $t=x+1$

これを $y=t^2-2$ に代入すると $y=(x+1)^2-2$

よって 放物線 $y=x^2+2x-1$

(ii) $y=\sqrt{t}$ より $y^2=t$

これを $x=t+2$ に代入すると $x=y^2+2$

また，$y=\sqrt{t}\geqq 0$　よって 放物線 $y^2=x-2$ の $y\geqq 0$ の部分

(iii) $x=4\cos\theta,\ y=2\sin\theta+3$ より $\cos\theta=\dfrac{x}{4},\ \sin\theta=\dfrac{y-3}{2}$

これを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると $\left(\dfrac{x}{4}\right)^2+\left(\dfrac{y-3}{2}\right)^2=1$

よって 楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$

(iv) $x=\dfrac{2}{\cos\theta},\ y=3\tan\theta$ より $\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{x}{2},\ \tan\theta=\dfrac{y}{3}$

これを $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入して $1+\left(\dfrac{y}{3}\right)^2=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

よって 双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$

(2)(i) $x=5\cos\theta,\ y=5\sin\theta$

(ii) $x=6\cos\theta,\ y=4\sin\theta$

(iii) $x+2=2\cos\theta,\ y-3=3\sin\theta$ より $x=2\cos\theta-2,\ y=3\sin\theta+3$

第 3 講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：②

[解説]

$x=t+2$ より，$t=x-2$

これを $y=t^2-4$ に代入すると，[A]

$$y=(x-2)^2-4$$

$$y=x^2-4x$$

よって，求める曲線は，

放物線 $y=x^2-4x$

[A]　与えられた2つの式から t を消去することを考える。

2　**[正解]** イ：③

[解説]

$x=\sqrt{t}$ より，$t=x^2$

これを $y=t-3$ に代入すると，

$$y=x^2-3$$

また，$x=\sqrt{t}\geqq 0$ [B]

よって，求める曲線は，

放物線 $y=x^2-3$ の $x\geqq 0$ の部分

[B]　x の変域に制限があることに注意する。

3

[正解] ウ：③

[解説]

$x=3\cos\theta$，$y=2\sin\theta-1$ より，

$$\cos\theta=\frac{x}{3},\quad \sin\theta=\frac{y+1}{2}$$ [C]

これらを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると，

$$\left(\frac{y+1}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^2=1$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$$

よって，求める曲線は，

楕円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1}$

［C］ $\cos\theta$，$\sin\theta$ を x，y の式で表す。

4

[正解] エ：①

[解説]

$x=\dfrac{3}{\cos\theta}$，$y=2\tan\theta$ より，

$$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{x}{3},\quad \tan\theta=\frac{y}{2}$$ [D]

これを $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入すると，

$$1+\left(\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{x}{3}\right)^2$$

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

よって，求める曲線は，

双曲線 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1}$

［D］ $\dfrac{1}{\cos\theta}$，$\tan\theta$ を x，y の式で表す。

5

[正解] オ：②

[解説]

$x^2+y^2=9$ より，$x^2+y^2=3^2$

この円の媒介変数表示の1つは，[E]

$$\boldsymbol{x=3\cos\theta,\quad y=3\sin\theta}$$

[E] 円 $x^2+y^2=a^2$ の媒介変数表示は，$x=a\cos\theta$，$y=a\sin\theta$

6

[正解] カ：③

[解説]

$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ より，$\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$

この楕円の媒介変数表示の1つは，[F]

$$\boldsymbol{x=2\cos\theta,\quad y=3\sin\theta}$$

[F] 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の媒介変数表示は，$x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$

7

[正解] キ：④

[解説]

$\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{16}=1$ より，

$$\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y+2)^2}{4^2}=1$$

この楕円の媒介変数表示の1つは，

$x-1=3\cos\theta$，$y+2=4\sin\theta$ [G]

$$\boldsymbol{x=3\cos\theta+1,\quad y=4\sin\theta-2}$$

[G] $x-1=X$，$y+2=Y$ とおき，$X=3\cos\theta$，$Y=4\sin\theta$ として，媒介変数表示を考える。